Řešení příkladů – funkce, definované implicitně

(1.) máme danou rovnici

$$y^3 - 2y^2x - xy - 8 = 0 \qquad (*)$$

a) v okolí bodu $(x_0, y_0) = (0,2)$ je rovnicí $(*)$ implicitně definována funkce $y = y(x)$, neboť:

1) $F(x,y) = y^3 - 2y^2x - xy - 8$, $F(x,y) \in C^\infty(R^2)$

2) $F(0,2) = 8 - 8 = 0$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 3y^2 - 4yx - x \Big|_{(0,2)} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(0,2)$ je rovnicí $(*)$ definována implicitně (dle věty o impl. fci) funkce $y = y(x)$, $y(0) = 2$.

b) Rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $(*)$, v bodě $(0,2)$:

Obecně: Je-li $\nabla F(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0)$, pak rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$ v bodě (x_0,y_0) této křivky je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

Tedy v tomto příkladu: $(x_0,y_0) = (0,2)$:

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,2) = -2y^2 - y \Big|_{(0,2)} = -8 - 2 = -10$

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 12$ (už máme), tedy rovnice tečny

v bodě $(0,2)$ je: $-10(x - 0) + 12(y - 2) = 0$, tj. (po úpravě)

$$5x - 6y + 12 = 0$$

c) <u>aproximace funkce $y(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ Taylorovým polynomem 2. stupně:</u>

$$T_2(x) = y(0) + y'(0).x + \frac{y''(0)}{2}x^2 \quad v \; U(0)$$

<u>Výpočet derivací $y'(0)$ a $y''(0)$:</u>

Funkce $y(x)$ splňuje rovnici (v okolí bodu $x_0=0$)

$$y^3(x) - 2y^2(x).x - xy(x) - 8 = 0 \qquad (**)$$

<u>$y'(0)$:</u> „$\frac{d}{dx}(**)$:" $\quad 3y^2(x).y'(x) - 4y(x).y'(x).x - 2y^2(x) - y(x) - xy'(x) = 0 \quad v\; U(0)$

tj. $\quad y'(x)\left(3y^2(x) - 4xy(x) - x\right) = 2y^2(x) + y(x) \qquad (***)$

v $x_0=0$: $\quad y'(0).\,12 = 10 \Rightarrow \underline{y'(0) = \frac{5}{6}}$

$y''(0)$: derivujeme rovnici $(***)$ dle x:

$$y''(x)(3y^2(x) - 4xy(x) - x) + y'(x)\left(6y(x).y'(x) - 4y(x) - 4xy'(x) - 1\right) =$$
$$= 4y(x).y'(x) + y'(x)$$

v $x_0=0$: $\quad y''(0).12 + \frac{5}{6}\left(\cancel{6}.2.\frac{5}{\cancel{6}} - 0 - 8 - 1\right) = 4.2.\frac{5}{6} + \frac{5}{6}$

tj. $\quad y''(0).12 + \cancel{\frac{5}{6}} = \frac{20}{3} + \cancel{\frac{5}{6}}$

$$\underline{y''(0) = \frac{5}{9}}$$

Tedy: $\quad \underline{T_2(x) = 2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{18}x^2 \quad v\; U(0)}$

(tj. v okolí $U(0)$ je „přibližné řešení" rovnice $(*)$ dáno $T_2(x)$,

tj. $\quad \underline{y(x) \cong 2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{18}x^2}$)

(2.) Je dána rovnice

$$z^4 - x^3yz^2 - xz + y^3 = 0 \qquad (*)$$

a) máme ukázat, že rovnicí (*) je v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ implicitně definována funkce $z = z(x,y)$: ověříme předpoklady „věty o implicitní funkci":

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & F(x,y,z) = z^4 - x^3yz^2 - xz + y^3 \in C^\infty(R^3) \\ 2) & F(1,1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \\ 3) & \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 4z^3 - 2x^3yz - x \Big|_{(1,1,1)} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{věta o impl. fci}$$

$\Longrightarrow$ v okolí bodu $(1,1,1)$ je rovnicí (*) definována implicitně funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1)=1$

b) Pomocí lineární aproximace máme určit přibližně hodnotu $z(1{,}01;\,0{,}96)$:

$$z(1{,}01;\,0{,}96) \cong \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)\cdot 0{,}01 + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\cdot(-0{,}04) + z(1,1)$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$: $\quad z^4(x,y) - x^3y\,z^2(x,y) - x\,z(x,y) + y^3 = 0 \quad$ v $U(1,1)$ (**)

derivace (**) dle x: (nepíšu $z(x,y)$ – „jen" z)

$$4z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 3x^2yz^2 - x^3y\cdot 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - z - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(4z^3 - 2x^3yz - x\right) = 3x^2yz^2 + z$$

v $(1,1)$: $\quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)\cdot 1 = 3 + 1$, tj.

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4}$$

(také lze užít „vzorec": $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = -3x^2yz^2 - z\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{-4}{1} = 4\ )$$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ – lze derivovat (**) podle y (nebo lze užít vzorec)

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -x^3z^2 + 3y^2 \quad , \text{ tj. } \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 2$$

a derivací (**) :

$$4z^3\frac{\partial z}{\partial y} - x^3z^2 - 2x^3yz\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} + 3y^2 = 0 \quad , \text{ a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(4z^3 - 2x^3yz - x) = x^3z^2 - 3y^2 \qquad (***)$$

v $(1,1)$: $\quad \underline{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \cdot 1 = -2}$ (cbd.)

Tedy: $\underline{z(1{,}01;\, 0{,}96)} \cong 1 + 4 \cdot 0{,}01 + 2(-0{,}04) = \underline{1{,}12}$

d) $\underline{?\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)}$: budeme derivovat rovnici pro $\frac{\partial z}{\partial y}$ (***) podle x :

a dosazeme! $\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) \text{ díky spojitosti derivace} \right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(4z^3 - 2x^3yz - x) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(12z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 6x^2yz - 2x^3y\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) =$$
$$= 3x^2z^2 + x^3 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 0$$

tj. v $(1,1)$: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) \cdot 1 - 2 \cdot (12 \cdot 4 - 6 - 8 - 1) = 3 + 2 \cdot 4$

a odtud $\quad \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = 77}$

③ Je dána rovnice

$$e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 = 0 \qquad (*)$$

a) ? rovnicí (*) je v okolí bodu (1,1,2) definována implicitní funkce $z = z(x,y)$: ověříme předpoklady „věty o implicitní funkci“:

1) $F(x,y,z) = e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 \in C^\infty(R^3)$

2) $F(1,1,2) = e^0 - 2 + 2.2 - 2 - 1 = 0$

3) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2) = e^{z-2x} - x + 2y \Big|_{(1,1,2)} = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (dle věty o implicitní funkci) rovnicí (*) je v okolí bodu (1,1,2) definována implicitní funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1) = 2$

b) ? $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$:

funkce $z(x,y)$ splňuje rovnici v okolí bodu (1,1):

$$e^{z(x,y)-2x} - x\,z(x,y) + 2y\,z(x,y) - 2y - xy^2 = 0 \quad (**)$$

a derivací (**) dle x dostaneme (opět píšeme místo $z(x,y)$ jen z)

$$e^{z-2x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 2\right) - z - x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial x} - y^2 = 0 , \text{ tj.}$$

$$(***) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}\left(e^{z-2x} - x + 2y\right) = z + y^2 + 2.e^{z-2x}$$

a v (1,1): $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 2 = 2 + 1 + 2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{5}{2}$

a výpočet $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ lze i užitím vzorce $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)}$,

tedy ($\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = e^{z-2x}(-2) - z - y^2$) je $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$;

a podobně $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\frac{0}{2} = 0$, neboť

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2z - 2 - 2xy$)

c) $z(x,y) \doteq z(1,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1)$, tedy

$\underline{z(x,y) \doteq 2 + \frac{5}{2}(x-1)}$ v okolí bodu $(x_0,y_0) = (1,1)$

d) výpočet $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$ – lze se určit z rovnice (***) nebo derivací „vzorce" pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ – tedy:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x} - x + 2y\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(z(x,y) + y^2 + 2e^{z(x,y)-2x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(e^{z(x,y)-2x} - x + 2y\right) + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + 2\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y} + 2y + 2e^{z(x,y)-2x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

a v (1,1): $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)\cdot 2 + \frac{5}{2}(0+2) = 0 + 2 + 0$

tedy $\quad \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = -\frac{3}{2}}$

4) Van der Waalsova stavová rovnice (p, T, V – stavové veličiny)

je $$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \quad , a>0, b>0$$

tj. $$\left(F(p,V,T)\equiv\right) \quad pV+\frac{a}{V}-bp-\frac{ab}{V^2}-RT=0$$

a nechť $$F(p_0,V_0,T_0)=0$$

---

máme přibližně vyjádřit změnu objemu ΔV při změně tlaku p_0 o Δp a teploty T_0 o ΔT:

Z věty o implicitní funkci dostáváme, že funkce $V=V(p,T)$ je diferencovatelná v bodě (p_0,T_0) (funkce $F(p,V,T)$ má spojité derivace, předpokládáme též, že $\frac{\partial F}{\partial V}(p_0,V_0,T_0) = p_0-\frac{a}{V_0^2}+\frac{2ab}{V^3} \neq 0$)

Pak platí: $(\Delta V = V(p,T)-V_0)$

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial p}(p_0,T_0)\cdot\Delta p + \frac{\partial V}{\partial T}(p_0,T_0)\Delta T$$

---

a $$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{V-b}{p-\frac{a}{V^2}+\frac{2ab}{V^3}} = \frac{(b-V)V^3}{pV^3-aV+2ab}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{-RV^3}{pV^3-aV+2ab}$$, tedy

$$\Delta V \doteq \frac{1}{p_0V_0^3-aV_0+2ab}\left((b-V_0)V_0^3\Delta p + RV_0^3\Delta T\right)$$ tj.

$$\Delta V \doteq \frac{V_0^3}{p_0V_0^3-aV_0+2ab}\left((b-V_0)\Delta p + R\Delta T\right)$$
